

БЛАНК ОТВЕТОВ №2

страница 3

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4. Условия задачи переписывать не нужно.

$x_1 = -4, x_2 = 8$

$x_1 = -4 < 0$ это не удовлетворяет условию $x > 0$, поэтому такой x не является решением исходной системы $\Rightarrow x = 8 \Rightarrow 8 = 2y^2 \Rightarrow y = \pm 2$

У нас есть условие, что $y > 0 \Rightarrow y = 2$

Итак, если $x = 8$, а $y = 2$, то $0,25x^2 - 2y^2 = 0,25 \cdot 64 - 2 \cdot 4 = 16 - 8 = 8 > 0 \Rightarrow$ решение $(8; 2)$

удовлетворяет всем условиям и действительно является единственным решением исходной системы.

5. Т.к. Борис обитает в Тобруйке редко, он там не живёт, т.к. жена аптекаря - младшая сестра Бориса, - Борис и аптекарь

У нас тут только одна подсказка на букву "Б", поэтому во 2-ом пункте не может говориться о Борисе и Фроисеяве вместе (иначе получите, что они оба бухгалтеры) $\Rightarrow$ во 2-ом пункте точно говорится об Андрее $\Rightarrow$ он живёт в городе, название которого начинается на "А", единственной вариант - архангелск. Если Андрей живёт в архангелске, то Борис и Фроисеява живут в другом городе. Борис живёт не в архангелске, и не в Тобруйке, значит, он живёт в Бессгороде, ну тогда Фроисеява остаётся Тобруйск

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Олимпиада школьников «Учить строить будущее» по дисциплине математика

ЧИСТОВИК

Вариант № 3

(без № варианта работа не проверяется и аннулируется)

При обнаружении в чистовике записей, не относящихся к решаемому варианту, работа не проверяется и аннулируется

БЛАНК ОТВЕТОВ № 1

(в столбце «Ответ» необходимо написать итоговый ответ на задачу)

Задача №	Ответ	Служебное поле
1	200 18	
2	$\frac{2000 \cos 28 \sin 22}{3(1 + \cos^2 22)^{3/2}}$	
3	$x \in \mathbb{Q}$	
4	$(8; 2)$	
5	Андрей - архангелск Борис - Бессгород Фроисеява - Тобруйск	
6	$x = \frac{n^2}{2}; n \in \mathbb{Z}$	
7		
8	$x \in (-3; -2) \cup [-1; 0) \cup (0; \frac{4}{3}]$	
9	$a \in (2; 4)$	
10		
Итого:		

Изменение неправильного ответа

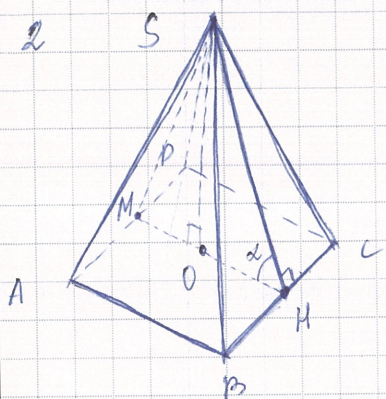
(для отмены неправильного ответа укажите номер задачи и впишите правильный ответ)

Задача №	Ответ	Служебное поле

БЛАНК ОТВЕТОВ №2

страница 1

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4.
Условия задачи переписывать не нужно.



Дано:

SABCD - правильная пирамида

$$SA = SB = SC = SD = 10 \quad \alpha - \text{угол между}$$

боковыми гранями и перпендикуляром
основания

Найти: $V_{SABCD} = ?$

Решение: Так пирамида правильная, точка M — середина $AD = BC$. Проведём апофему SN и сторону BC основания.

Так пирамида правильная, $SB = SC \Rightarrow SN$ — высота и медиана $\triangle SBC$. Проведём отрезок NM ($NM \in (ABCD)$, $NM \perp BC$)

$$\angle SNM = \alpha \text{ по условию}$$

Так $ABCD$ — квадрат (свойство правильной четырёхугольной пирамиды) и $BM \perp MN$, $MN \perp BC$, $MB \perp MN \perp BC$ и $BM = CN$,

MN — средняя линия квадрата $ABCD \Rightarrow AM = MB \Rightarrow SM$ — медиана $\triangle SAD$. Учитывая, что $SA = SD$, получаем $SM \perp AD$

Р-ли $\triangle SMN$:

$$MN = AB = BC = 2BN, \quad SM \text{ по теореме Пифагора для } \triangle SAM \quad SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AD}{2}\right)^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{SA^2 - BN^2}, \text{ по теореме}$$

$$\text{Пифагора для } \triangle SNB \quad SN = \sqrt{SB^2 - BN^2} = \sqrt{SA^2 - BN^2} \Rightarrow \triangle SMN - \text{равно-}$$

$$\text{бедренный} \Rightarrow MN = 2SN \cos \alpha = 2\sqrt{SA^2 - BN^2} \cos \alpha = 2BN \cos \alpha \quad \text{отсюда найдем BN}$$

$$(SA^2 - BN^2) \cos^2 \alpha = BN^2 \quad BN^2(1 + \cos^2 \alpha) = SA^2 \cos^2 \alpha$$

$$BN = \sqrt{\frac{SA^2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}}$$

Отметим на MN перпендикуляр SO. Изобразим высоту пирамиды SO. Так пирамида правильная и MN — средняя

БЛАНК ОТВЕТОВ №2

страница 2

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4.
Условия задачи переписывать не нужно.

внешия ABCD, $O \in MN$ и $MO = ON$

$$\text{из } \triangle SON \text{ найдем } SO = SN \sin \alpha = \sqrt{SA^2 - BN^2} \sin \alpha$$

$$V_{SABCD} = S_{ABCD} \cdot SO = \frac{BC^2 \cdot SO}{2} = \frac{(2BN)^2 \cdot SO}{2} = 4BN^2 \cdot SO =$$

$$= \frac{4SA^2 \cos^2 \alpha}{(1 + \cos^2 \alpha) \cdot 3} \cdot \frac{\sqrt{SA^2 - BN^2} \sin \alpha}{3} = \frac{4SA^2 \cos^2 \alpha}{3(1 + \cos^2 \alpha)} \cdot \sqrt{\frac{SA^2}{1 + \cos^2 \alpha}} \sin \alpha =$$

$$= \frac{4SA^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{3(1 + \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2000 \cos \alpha \sin 2\alpha}{3(1 + \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

Напишем имеющиеся ограничения:

$$\begin{cases} 0,5x > 0 \\ y > 0 \\ 0,25x^2 - 2y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 0,25x^2 - 2y^2 > 0 \end{cases}$$

Теперь преобразуем данные уравнения:

$$\begin{cases} \log_3(0,5x) - \log_3 y^2 = 0 \\ \log_2(0,25x^2 - 2y^2) - \log_2 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3\left(\frac{x}{2y^2}\right) = 0 \\ \log_2\left(\frac{0,25x^2 - 2y^2}{8}\right) = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \\ 0,25x^2 - 2y^2 > 0 \end{cases}$$

получим вот такую
систему, из которой
просто найду решения
уравнений, а затем
подставлю проверку
удовлетворяют ли они нашим
ограничениям.

$$\log_3\left(\frac{x}{2y^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2y^2} = 1 \Rightarrow x = 2y^2$$

$$\log_2\left(\frac{0,25x^2 - 2y^2}{8}\right) = 0 \Rightarrow \frac{0,25x^2 - 2y^2}{8} = 1 \Rightarrow 0,25x^2 - 2y^2 - 8 = 0$$

Подставим вместо $2y^2$ x , получим квадратное уравнение

$$0,25x^2 - x - 8 = 0$$

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4. Условия задачи переписывать не нужно.

Ботт не шотет $\Rightarrow n = 18$

8. $\log_{3+2} (3x^2) - \log_{3+2} (x+4) \leq 0$

ОДЗ: $x \neq 0$
 $x > -3$
 $x \neq -2$
 $x > -4$

$\log_{3+2} \left(\frac{3x^2}{x+4} \right) \leq 0$

Решается методом рационализации

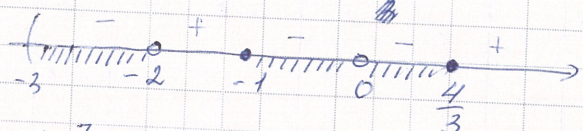
$(2+x)(3x^2 - x - 4) \leq 0$

(т.к. $x+4 > 0$, умножим на него и знак не поменяется)

$(2+x)(3x^2 - x - 4) \leq 0$

$(2+x)(x+1)(3x-4) \leq 0$

$(2+x)(x+1)(3x-4) \leq 0$



$x \in (-3; -2) \cup [-1; 0) \cup (0; 4/3]$

9. Рассмотрим случаи:

1) $x+5 > 0 \Rightarrow x > -5$ $2(x+5) + |a-3| = x+6$

$2x+10 + |a-3| - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -|a-3| - 4$
 $-1 \leq a-3 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq a \leq 4$

2) $x+5 < 0 \Rightarrow x < -5$ $-2(x+5) + |a-3| = x+6$
 $3x = |a-3| - 16 \Rightarrow x = \frac{|a-3| - 16}{3} < -5 \Rightarrow |a-3| < 1 \Rightarrow a \in (2; 4)$

Уравнение имеет 2 корня $x_1 = -|a-3| - 4$, $x_2 = \frac{|a-3| - 16}{3}$

но нужно рассмотреть случаи когда они совпадают.
 $x_1 = x_2$ при $a = 2; 4 \Rightarrow$ уравнение имеет 2 корня при $a \in (2; 4)$

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4. Условия задачи переписывать не нужно.

Дано прописывается некоторая неоднозначность: Бронислав или Борис. Рассмотрим оба случая:

1) Борис Бронислав-буксирер.

Т.к. Борис не буксирер, и не аптекарь, он - агроном $\Rightarrow$ единственный аптекарь

2) Борис - буксирер

Тогда прописаны аптекарь и агроном или то разделим между собой единственный и Бронислав. Таким образом, у нас всего 3 варианта распределения профессий:

	единств.	Борис	Бр.		единств.	Борис	Бр.
едрн.	+			едрн.	+		
Бронислав		+		Бронислав		+	
Борислав			+	Борислав			+
аптекарь	+			аптекарь	+		
агроном		+		агроном		+	
буксирер			+	буксирер			+

	единств.	Борис	Бр.
едрн.	+		
Бронислав		+	
Борислав			+
аптекарь	+		+
агроном		+	
буксирер			

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} (1 + \sin x)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} (1 - \sin x)\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} (1 - \sin x)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)$

БЛАНК ОТВЕТОВ №2

страница 5

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4.
Условия задачи переписывать не нужно.

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}(1 - \sin x) = \frac{\pi}{2} \cos x + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2}(1 - \sin x) = -\frac{\pi}{2} \cos x + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sin x - \frac{\pi}{2} \cos x = 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sin x + \frac{\pi}{2} \cos x = 2\pi m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sin x - \cos x = 4n - 1, & n \in \mathbb{Z} \\ \cos x - \sin x = 4m - 1, & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

П.к. $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, -(\sin x + \cos x) \geq -2$ и $-(\sin x + \cos x) \leq 2 \Rightarrow |4n - 1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 4n - 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 4n \leq 3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} -0,25 \leq n \\ 0,75 \geq n \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow n = 0$$

аналогично, $|\cos x - \sin x| \leq 2 \Rightarrow |4m - 1| \leq 2 \Rightarrow$

$$-2 \leq 4m - 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 4m \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} -0,25 \leq m \\ 0,75 \geq m \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m = 0$$

$$\begin{cases} -\sin x - \cos x = -1 \\ \cos x - \sin x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 1 \\ -\cos x + \sin x = +1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{возведем уравне-} \\ \text{ния в} \\ \text{квадрат} \end{array}$$

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{используем основное} \\ \text{тригонометрическое} \\ \text{тождество} \end{array}$$

$$\begin{cases} 1 + 2\sin x \cos x = 1 \\ 1 - 2\sin x \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin x \cos x = 0 \\ -2\sin x \cos x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi l}{2}; l \in \mathbb{Z}$$

3. $6x - 8 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [2; 4], 7x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{7}, x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

ОДЗ: $x \in [2; 3) \cup (3; 4]$

Заметим, что логарифм по основанию 16 - возрастающая

БЛАНК ОТВЕТОВ №2

страница 6

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4.
Условия задачи переписывать не нужно.

функции $\Rightarrow \log_{16}(7x-3) > 0$ на ОДЗ, т.к. $\log_{16}(7 \cdot 2 - 3) = \log_{16}(14-3) = \log_{16} 11 > 0$

Пусть $f(t) = \arccos t$, $f(t) \in [0; \pi]$ по определению
т.е. $f(t) \geq 0 \Rightarrow \arccos\left(\frac{1}{x-3}\right) \geq 0$

ну и соответственно $\sqrt{6x-8-x^2} \geq 0$

Сумма 2-х неотрицательных и одного положительного слагаемых даёт в результате положительное число $\Rightarrow$ уравнение не имеет действительных корней

1. Пусть было n участников, тогда всего было сыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ игр (каждой сыграно $n-1$ игру, но т.к. в каждой игре участвует двое, делим произведение на 2). Пусть в каждой игре разыгрывается 1 очко (победителю 1, проигравшему 0, если ничья, то каждому по 0,5, в любом случае сумма очков всех участников после каждой игры увеличивается на 1), тогда сумма очков равна количеству игр. У победителя $n-1$ очко, т.к. он выиграл все игры. Составим уравнение:

$$8(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$18(n-1) = n(n-1)$$

$$18n - 18 = n^2 - n$$

$$n^2 - 19n + 18 = 0$$

$$n_{1,2} = 1; 18$$

Ну с одним участником турнир